



TITLE:

ベルグマン核の種々の安定性について (再生核の応用についての研究)

AUTHOR(S):

大沢, 健夫

---

CITATION:

大沢, 健夫. ベルグマン核の種々の安定性について (再生核の応用についての研究). 数理解析研究所講究録 2008, 1618: 1-23

ISSUE DATE:

2008-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140197>

RIGHT:

## バルグマン核の種々の安定性について

大沢 健夫

(名古屋大学・多元数理)

序. 再生核は現在様々な方面に応用されているが、元来は 1907 年、ポーランドの数学者 S. Zarembka が 2 重調和関数 ( $\Delta\Delta f = 0$  の解) に対する Dirichlet 問題を直交射影の方法で解くために導入したものである。複素解析における Bergman 核は  $L^2$  正則関数に対する再生核であり、1922 年、S. Bergman らによって導入された。多変数複素解析におけるその本格的な研究は、岡潔らにより基礎が整えられた 1950 年ごろから始まり、C. B. Morrey らによる調和積分論の拡張をうけて、1965 年、L. Hörmander [H] により、強擬凸領域上の Bergman 核に関して基本的な結果が得られた。座標のとりかえに関する Bergman 核の変換則は双正則不変な計量である Bergman 計量を導くが、Hörmander の解析によってその双正則幾何への応用に新たな道が開け、1974 年、C. Fefferman [F-1] により  $C^\infty$  級の滑らかな境界をもつ強擬凸領域の間の双正則写像が境界まで  $C^\infty$  級に拡張できることが示された。その後、Hörmander の理論の拡張に伴って Bergman 核への理解が一層深まり、Fefferman の定理も一般化された ([B-L], [F-2], [Hi])。

Bergman 核の理論が詳しくなるにつれ、方々で様々な問題が立てられるようになった。最近では複素幾何への応用という観点から助変数に関する依存性が調べられ、発展性のありそうな結果が得られている (cf. [M-Y], [B], [T])。

今や Bergman 核は多くの相貌を持っているが、それらに触れつつも、Bergman 核の本来の面目に思いをこらしてみたい。そこにはまだ、知られざる美しい原理がひそんでいるように感ずるからである。

小論では Bergman 核の安定性に関わるいくつかの結果を紹介するが、それは偏にこのような動機に基づくものである。

### §1. 複素多様体上の Bergman 核 (準備)

一般に再生核というのは、ある集合  $X$  上の関数のなす Hilbert 空間  $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$  において、付値写像

$$\begin{array}{ccc} x : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad (x \in X)$$

の連続性の条件が満たされるときに定まる関数

$$K : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$$

であって、 $\mathcal{H}$  の内積  $\langle, \rangle$  に関する再生性

$$(1.1) \quad f(x) = \langle f(\cdot), \overline{K(x, \cdot)} \rangle \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

をもつものをいう。 $X$  や  $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$  が具体的に与えられたとき、それに応じて再生核  $K$  に  $X$  と  $\mathcal{H}$  の性質が反映

されるので、その仕組みを解析することにより、 $K$  からそれらについての情報を引き出せると期待される。

$X$  が  $\mathbb{C}^n$  の有界領域  $D$  であり、 $\mathcal{H}$  が  $D$  上の  $L^2$  正則関数の空間の場合、再生核  $K$  を  $D$  の Bergman 核と呼び、 $K_D(z, w)$  で表す。このとき  $\mathcal{H}$  は Bergman 空間と呼ばれる。  $K_D$  により  $D$  上の Kähler 計量 (の基本形式)

$$\omega_D := \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log K_D(z, z)$$

が定まる。H. Bremermann は  $\omega_D$  が完備ならば  $D$  は正則凸であることを示したが、これは多変数複素解析における Bergman 核の役割を示唆する有名な例である。

計量  $\omega_D$  は  $D$  の Bergman 計量と呼ばれる。有界領域  $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^n$  の間に双正則写像  $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$  があるとき、 $\varphi^* \omega_{D_2} = \omega_{D_1}$  が成立する。これは Bergman 計量の著しい性質である。

一般の複素多様体上では正則関数が定数しかないことが多いので、Bergman 核をそのままの形で拡張して計量を取り出すのには無理がある。そこで関数の代りに微分形式の空間を考える (cf. [K]):

$M$  を連結な  $n$  次元複素多様体とし、 $M$  上の正則  $n$  形式  $f$  で可積分条件

$$\|f\|^2 := \sqrt{-1}^{n^2} \int_M f \wedge \bar{f} < \infty$$

をみたすものの集合を  $\mathcal{H}_M$  とする。内積

$$\langle f, g \rangle = \sqrt{-1}^{n^2} \int_M f \wedge \bar{g}$$

により、 $\mathcal{H}_M$  は Hilbert 空間になる。 $M$  の正則接ベクトル束を  $T^{1,0}M$ 、その双対を  $(T^{1,0}M)^*$  としたとき、外積  $\wedge(T^{1,0}M)^*$  を  $M$  の標準束といい、 $K_M$  で表す。

このとき  $M$  の各点  $z$  に対して  $K_M$  の  $z$  上のファイバー  $K_{M,z}$  に値をとる一般化された付値写像

$$\begin{array}{ccc} z : \mathcal{H}_M & \longrightarrow & K_{M,z} \\ \psi & & \psi \\ f & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

が定まるが、Cauchy の評価式よりこれは連続である。従って、 $\pi_j : M \times M \rightarrow M$  ( $j=1, 2$ ) を第  $j$  成分への射影として

$$f(z) = \langle f(\cdot), \overline{K_M(z, \cdot)} \rangle$$

をみたす一般化された再生核

$$K_M : M \times M \longrightarrow \pi_1^* K_M \otimes \overline{\pi_2^* K_M}$$

が定まる。これを  $M$  の Bergman 核 (形式) と呼ぶ。  $M$  が  
 上のように  $\mathbb{C}^n$  の有界領域の場合、  $\mathcal{H}_M$  は対応

$$f dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \longmapsto f$$

により自然に  $L^2$  正則関数の空間と同一視できるので、  
 この Bergman 核の定義は先に与えたものと一致する。

$K_M$  を  $M \times M$  の対角線集合  $\Delta_M$  に制限したものはベクトル束  $\mathcal{L} := \pi_1^* K_M \otimes \overline{\pi_2^* K_M} |_{\Delta_M}$  の断面であるが、  
 $\mathcal{L}$  の変換関数が |正則関数|<sup>2</sup> の形をしていることから  
 $K_M(z, z)$  が 0 点をもたなければ

$$\omega_M := \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log K_M(z, z)$$

により、  $M$  上の半正値  $(1, 1)$  形式が定まる。これを  
 $M$  上の Bergman 擬計量という。  $\omega_M$  がいたる所  
 正値のとき、  $\omega_M$  は  $M$  上の Kähler 計量になる。  
 これを  $M$  の Bergman 計量という。

Bergman 核  $K_M(z, w)$  は、  $\mathcal{H}_M$  の完全正規直交系  $\{f_\mu\}_{\mu=1}^N$   
 ( $0 \leq N \leq \infty$ ) を用いて

$$(1.2) \quad K_M(z, w) = \sum_{\mu=1}^N f_\mu(z) \otimes \overline{f_\mu(w)} \quad (\text{広義一様})$$

と書ける。この表示より

$$(1.3) \quad K_M(z, z) = \sup \left\{ |f(z)|^2 \mid \|f\|=1, f \in \mathcal{H}_M \right\}$$

が容易にわかる。また  $f_\mu$  の連比による写像

$$\begin{array}{ccc} \Phi: M & \longrightarrow & \ell^2_\mathbb{C} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* =: \mathbb{CP}^\infty \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ z & \longmapsto & (f_1(z) : f_2(z) : \cdots : f_\mu(z) : \cdots) \end{array}$$

により  $\mathbb{CP}^\infty$  の Fubini-Study 計量を引き戻すと  $M$  の Bergman 擬計量になることも同様である。この解釈から Bergman 計量が完備になるための有用な十分条件が得られる (小林の判定条件)。これを用いて最近次の結果が示された。

定理 1.1. (B.-Y. Chen [Ch]) 強多重劣調和関数  $\varphi: M \rightarrow [-1, 0)$  で、 $\forall c < 0$  に対して  $\varphi^{-1}([-1, c])$  がコンパクトであるものが存在すれば、 $M$  上には Bergman 計量が存在し、しかもそれは完備である。

このような多様体上で Kähler-Einstein 計量と Bergman 計量の比較ができれば面白いかもしれない。

## §2. 上半連続性と連続性

助変数  $t \in (-1, 1)$  に依存する複素多様体の変形族  $\{M_t\}$  があるとき、 $M_t$  の Bergman 核  $K_{M_t}$  が  $t$  にどう依存するかを問題にする。

[変形族の定義]  $M$  を連結な  $n$  次元複素多様体、 $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  ( $\varphi_\alpha: U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ ) を  $M$  上の局所座標系 (アトラス) とする。  $\hat{M} := M \times (-1, 1)$  上の  $C^\infty$  級の局所座標系  $\hat{\mathcal{A}} = \{(\hat{U}_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  があり、 $\hat{\varphi}_\alpha(\hat{U}_\alpha) = \varphi_\alpha(U_\alpha) \times (-1, 1)$ 、かつ座標変換

$$\hat{\varphi}_\alpha \circ \hat{\varphi}_\beta^{-1}: \hat{\varphi}_\beta(\hat{U}_\alpha \cap \hat{U}_\beta) \longrightarrow \hat{\varphi}_\alpha(\hat{U}_\alpha \cap \hat{U}_\beta)$$

を  $\varphi_\beta(U_\beta) \times (-1, 1)$  と  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times (-1, 1)$  の座標  $(z_\beta, t)$ ,  $(z_\alpha, t)$  で書いたとき、

$$\hat{\varphi}_\alpha \circ \hat{\varphi}_\beta^{-1}(z_\beta, 0) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z_\beta)$$

$$\hat{\varphi}_\alpha \circ \hat{\varphi}_\beta^{-1}(z_\beta, t) = (z_\alpha(z_\beta, t), t)$$

であり、さらに  $z_\alpha$  は  $z_\beta$  に関して正則になっているとする。

このとき  $M_t := M \times \{t\}$  ( $-1 < t < 1$ ) は局所座標系

$$\mathcal{A}_t = \{(U_{\alpha,t} := \hat{\varphi}_\alpha^{-1}(U_\alpha \times \{t\}), \hat{\varphi}_\alpha|_{U_{\alpha,t}})\}_{\alpha \in A}$$



をもつ複素多様体である。 $(\hat{M}, \hat{\mathcal{A}})$ 、または  $\mathcal{M} := \{M_t \mid t \in (-1, 1)\}$  を  $(-1, 1)$  上の  $M$  の局所変形族という。一般の変形族は局所変形族をつなげたものとして定義する。以下の話は局所変形族についてのものであるが、簡単のため変形族についての命題として述べる。

定理 2.1.  $M$  の変形族  $\{M_t\}_{t \in (-1, 1)}$  に対し、任意の点  $z \in M$  で

$$\limsup_{t \rightarrow 0} K_{M_t}(z, z) \leq K_M(z, z)$$

が成立する。

$K_M(z, z) \neq 0$  であっても  $K_{M_t}(z, z) \equiv 0$  ( $\forall t \neq 0$ ) となることはあり、興味深い例もあるが、多少こみ入っているのであとで触れよう。

一方、 $K_M(z, z) \equiv 0$  かつ  $K_{M_t}(z, z) \neq 0$  ( $t \neq 0$ ) となる例はありふれたものである。たとえば  $M = \mathbb{C}$  は 1 つの座標  $\text{id}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  から成るアトラスをもつが、写像

$$\begin{array}{ccc} M \times (-1, 1) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \times (-1, 1) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ (z, t) & \longmapsto & \left( \frac{z}{t^2|z|^2+1}, t \right) \end{array}$$

によって定まる変形族  $\{M_t\}$  において、 $t \neq 0$  ならば  $M_t \simeq \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  であり、従って  $K_M \equiv 0$ 、かつ  $K_{M_t} \neq 0$  となる。

次は定理1と(1.3)、および Hodge 理論より容易に従う。

定理 2.2. コンパクトな Kähler 多様体  $M$  の変形族  $\{M_t\}$  に対し、

$$(2.1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} K_{M_t}(z, w) = K_M(z, w) \quad (\text{一様})$$

ちなみに  $M$  が非 Kähler の場合、反例が中村郁氏  
によって与えられている (cf. [N] )。ただし  $\dim M = 2$   
ならば、分類理論により反例は存在しない。(これらを御  
教示下さった辻元氏と小木曾啓示氏に感謝する。)

一方、 $L^2$  拡張定理 (cf. [O-T], [O-1] ) を用い  
れば次が示せる。

定理 2.3. コンパクトな複素多様体  $M$  の変形族  
 $\{M_t\}$  が以下をみたすとする。

i)  $\{M_t\}$  は複素解析族へと拡張できる、すなわち  
 $M \times (-1, 1)$  を実超曲面として含む複素多様体  
 $\tilde{M}_{\mathbb{C}}$  と全射適正 (proper) 正則写像  $\pi: \tilde{M}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{D}$   
が存在して、包含写像  $\iota: M \times (-1, 1) \hookrightarrow \tilde{M}_{\mathbb{C}}$  と  
 $\pi$  の合成は射影  $M \times (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$  に等しい。

ii)  $\tilde{M}_{\mathbb{C}}$  の余次元 1 の複素解析的部分集合  $S$  が

存在して、 $M_c \setminus S$  は Stein 多様体であり、かつ  
 $(M \times \{0\}) \not\subset S$  である。

このとき (2.1) が成立する。

この結果を非コンパクトな多様体の変形族に対して  
 拡張することには大きな意味があると考えているのだが、  
 それについてはまだ言試作品しかできていない (cf. [0-2])。

次に  $\mathbb{C}^n$  の領域の変形族についてだが、簡単のため  
 滑らかな  $C^\infty$  級の境界をもつ有界領域に限って述べる。  
 $D$  をそのような領域とし、閉包  $\bar{D}$  の変形族  $\mathcal{D} = \{\bar{D}_t\}$  を  
 ふちつき複素多様体の変形族として上と同様に定義する。

定理 2.4.  $D$  が強擬凸領域ならば、変形族  
 $\mathcal{D}$  に対して

$$(2.2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} K_{\bar{D}_t}(z, w) = K_D(z, w) \quad (\text{広義一様})$$

である。

証明には (1.2), (1.3) および  $L^2$  標準  
 解の評価を用いる。

定理 2.4 における  $D$  の強擬凸性はどこまで緩めることが  
 できるだろうか。ただし  $\bar{D}_t$  がすべて擬凸ならば同様の

議論が成立するから問題にならない。(2.2)が成り立たない族の例は、 $\overline{D}$  が Stein 近傍系をもたない  $D$  に対して容易に作れる。

定理 2.4 の仮定の下で、 $K_D(z, w)$  は実際には  $(z, w, t)$  に関して  $(\overline{D} \times \overline{D} \setminus \Delta_{2D}) \times \{0\}$  の近傍で  $C^\infty$  級であることが知られている (cf. [G-K])。これにより、強擬凸領域の境界に定まる CR 構造の変形と、Bergman 核の漸近展開の係数の変形が、然るべき公式で結ばれるであろうことが予測される。

### §3. 上空極限について

$D$  が開球  $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$ 、あるいはより一般に有界対称領域である場合には、又正則自己同型群  $\text{Aut}(D)$  は  $D$  に効果的かつ固定点なしに、かつ真性不連続に作用する部分群を含み、 $\Gamma$  をそのような群とするとその作用による  $D$  の商空間  $D/\Gamma$  はコンパクトな複素多様体になる。 $D$  の Bergman 計量は  $\Gamma$  不変性により多様体  $M := D/\Gamma$  上に計量  $\tilde{\omega}_M$  を誘導し、これは  $D$  の Bergman 核が定める  $K_M$  上のファイバー計量の曲率形式に一致する。これが計量  $\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log K_D(z, z)$  の小平邦彦氏による解釈であり、特に  $K_M$  が小平の意味で正であることを意味し、従って小平の埋め込み定理により  $M$  は射影的代数多様体になる。

1次元のコンパクトな複素多様体は、その標準束が正ならば、Koebeの一意化定理により普遍被覆面が $\mathbb{D}$ に同型であるから、すべて $\mathbb{D}/\Gamma$ の形になるが、高次元の場合、普遍被覆が有界対称領域になるような多様体は非常に限られる。(Margulis [M] と Yau [Y-1] の結果は有名である。)

(これに関する結果として)

このクラスの多様体の研究の中で、D. Kazhdan [Kd] は、多様体の‘塔’ (tower) に沿う Bergman 核の極限について調べており、[Y-2] によれば Kazhdan は一般に次が成り立つことを主張している。

[上空極限定理]  $M$  は (一般の) 複素多様体。  
 $\hat{M} \longrightarrow M$  は Galois 被覆であるとする。 $\text{Aut}(\hat{M})$  の部分群の列  $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_k \supset \dots$  で、 $\hat{M}/\Gamma_1 \simeq M$ , 指数  $[\Gamma_k, \Gamma_{k+1}]$  は有限 ( $\forall k$ )、かつ

$$(3.1) \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = \{\text{id}\}$$

となるものを取り、 $M_k := \hat{M}/\Gamma_k$ ,  $\pi_k: \hat{M} \longrightarrow M_k$  は射影とする。このとき、もし  $\hat{M}$  が Bergman 計量をもてば

$$(3.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k^* \partial \bar{\partial} \log K_{M_k} = \partial \bar{\partial} \log K_{\hat{M}}$$

が成立する。

この命題の完全な証明はまだ存在しないようであるが、1993年、A. Rhodes [R] は、 $\hat{M} = \mathbb{D}$  であり  $M_k$  はすべてコンパクトであるとき、次のいずれかが満たされれば (3.2) が成立することを示した。

- (a) Poincaré 計量に関する  $M_k$  上の Laplace 作用素の最小正固有値を  $\lambda_k$  とするとき

$$\inf_k \lambda_k > 0.$$

- (b)  $\Gamma_k$  はすべて  $\Gamma_1$  の正規部分群である。

この結果は H. Donnelly [D] および [O-4] において多少一般化された。たとえば (a) がみたされれば  $M_k$  はコンパクトでなくてもよい。特に  $SL(2, \mathbb{Z})$  の主合同部分群の系列に対して (a) がみたされることが [L-R-S] により知られているので、この場合には上空極限定理が正しいことがわかる。

[D] と [O-4] では (3.2) より強い結果

$$(3.3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k^* K_{M_k}(z, z) = K_{\hat{M}}(z, z)$$

が示されている。また、この証明より

$$(3.4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k^* K_{M_k}(z, w) = K_{\hat{M}}(z, w)$$

も同じ条件下で成立することがわかる。[O-4]では  $\hat{M} = \mathbb{D}$ , (a), および  $M_1$  のコンパクト性だけを仮定して (3.3) を導いている。 ( $[\Gamma_n, \Gamma_{n+1}] < \infty$  は不要である。)

ちなみに [D-W] によれば、すべてのリーマン対称空間は (3.1) と (a) をみたす余コンパクトな自己等長同型群の降鎖列をもつ。そして、それらに付随する多様体塔における Betti 数の列の漸近挙動に関して、S.-K. Yeung 氏により興味深い結果が得られている (cf. [Yn])。 (文献 [D], [D-W], [Yn] をお教え下さった S.-K. Yeung 氏に感謝する。)

#### §4. 汎多重劣調和性

この節では、複素解析族に対する Bergman 核のパラメータ依存性に関して、単なる (半)連続性よりも詳しい結果を紹介する。

$M$  は連結な複素多様体とし、複素多様体  $\mathcal{M}$  と全射正則写像  $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{D}$  で、 $\text{rank } d\pi \equiv 1$  かつ  $\pi^{-1}(0) \simeq M$  をみたすものが与えられているとする。このとき複素多様体  $M_\zeta := \pi^{-1}(\zeta)$  の族  $\{M_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{D}}$  に対する  $K_{M_\zeta}(z, z)$  の性質が詳しくわかるようになり、代数幾何学に応用されている。そのような最近の展開の発端は、米谷文男氏と山口博史氏による次の結果である。

定理 4.1. (cf. [M-Y]) 複素解析族  $\{M_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{D}}$  に対し、すべての  $M_\zeta$  は連結な開リーマン面であり、全空間  $M$  は Stein 多様体であるとする。このとき  $\log K_{M_\zeta}(z, z)$  は、 $M$  の各座標近傍上で、 $(z, \zeta)$  の関数として多重劣調和であるか、または  $-\infty$  である。

この証明は Laplace 方程式の基本解 (i.e. Green 関数) の変分の計算と、Bergman 核を Green 関数を用いて表す吹田の公式を組み合わせて行なわれたが、B. Berndtsson 氏は再生公式 (1.1) を Bergman 核自身に適用した式を直接微分して、定理 4.1 を高次元の擬凸領域の複素解析族に対して一般化した。その結果を [B] に沿って述べよう。

$D$  を  $\mathbb{C}_t^k \times \mathbb{C}_z^m$  内の擬凸領域 ( $t, z$  は座標を表す) とし、 $\varphi$  を  $D$  上の多重劣調和関数とする。

$$D_t := \{z \mid (t, z) \in D\}$$

$$\varphi^t := \varphi|_{D_t}$$

とおき、 $A_t^2 := A^2(D_t, \varphi^t)$  を  $D_t$  上の正則関数  $h$  で

$$\int_{D_t} |h|^2 e^{-\varphi^t} < \infty$$

をみたすものの全体のなす Hilbert 空間、 $K_t(\zeta, z)$  を



その再生核とする。

定理 4.2.  $D$  から  $[-\infty, \infty)$  への関数

$$(t, z) \mapsto \log K_t(z, z)$$

は多重劣調和であるか、または  $D$  上で  $\equiv -\infty$  である。

証明の概要： まず  $D$  が強擬凸の場合に再生公式を用いて  $\partial_t \bar{\partial}_t K_t(z, z)$  を計算すると、 $\bar{\partial}$  方程式の  $L^2$  基本解についての Hörmander の定理を使って

$$(4.1) \quad \sqrt{-1} \partial_t \bar{\partial}_t K_t(z, z) \geq 0$$

が得られる。 $\varphi$  は任意だから、 $t$  に関する任意の多重劣調和関数  $\varphi(t)$  に対して  $e^{\varphi(t)} K_t(z, z)$  が  $t$  に関して多重劣調和であることが (4.1) から従う。さらにこのことから  $\log K_t(z, z)$  の  $t$  に関する多重劣調和性が従い、 $\{D_t\}$  の代わりに  $\{D_t - a(t)\}$  をとると、 $\log K_t(z + a(t), z + a(t))$  が任意の  $a \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$  に対して  $t$  に関して ( $t=0$  の近くで) 多重劣調和であることもわかる。従ってこの場合、 $\log K_t(z, z)$  は  $(t, z)$  に関して多重劣調和である。

$D$  が一般の擬凸領域の場合には、 $D$  を内側から強擬凸領域の増大列  $D^k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) で近似する。それらに対応する再生核の列  $K_t^k(z, z)$  について、 $\log K_t^k(z, z)$  が  $\log K_t(z, z)$  に収束する減小列になることから、

$\log K_t(z, z)$  は多重劣調和であるが、または  $\equiv -\infty$  となる //

一般に、Hermite 計量付きの複素多様体  $(M, \omega)$  と  $M$  上の Hermite 正則ベクトル束  $(E, h)$  に対して、 $E$  の  $L^2$  正則断面全体のなす Hilbert 空間  $A^2(M, E, \omega, h)$  (一般化された Bergman 空間) が定まる。これに対する一般化された再生核も、最近では Bergman 核と呼ばれる。このような Bergman 核は、代数幾何に表れる

$$(\text{標準束})^m \otimes L \quad (L \text{ は直線束})$$

の形をした直線束の曲率を調べるのに適しており、定理 4.2 はそのような場面で応用されている (cf. [B-P])。

## §5. 平衡極限

以下では第3節の上空極限とは別種の極限について述べよう。

まず多重劣調和関数に対する Demailly の近似定理を思い出そう。

$D \subset \mathbb{C}^n$  は擬凸であるとし、 $\varphi$  を  $D$  上の多重劣調和関数とする。  $A^2(D, m\varphi)$  を  $D$  上の正則関数  $f$  で

$$\int_D |h|^2 e^{-m\varphi} < \infty$$

をみたすもの全体とし、 $K_{D,m\varphi}$  を  $A^2(D, m\varphi)$  の再生核とする。

定理 5.1. (cf. [D<sub>m</sub>] または [O-3])

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log K_{D,m\varphi} = \varphi \quad (\text{各点収束})$$

証明には [O-T] の  $L^2$  拡張定理を用いる。

関数  $\varphi$  として特に、コンパクト集合の容量に付随する極値的多重劣調和関数を取り、それを上のように近似したとき、

‘ $\frac{1}{m} \log K_{D,m\varphi}$  は もっと良く  $\varphi$  に収束するのではないか’

と考えるのは自然であろう。最近の R. Berman-S. Boucksom の論文ではそのような結果が得られているので、以下ではそれを紹介したい。

$X$  を複素射影的代数多様体とし、 $L$  を  $X$  上の正直線束、 $H^0(L)$  を  $L$  の正則断面全体とする。 $L$  の任意の Hermite 計量を取り、それを  $e^\phi$  ( $\phi \in L^1_{loc}$ ) で表す (局所表示)。また、 $H^0(L)$  の元  $s$  の長さを  $|s|_\phi$  で表す。

$X$  内の局所非多重極 (locally non-pluripolar) なコンパクト集合  $K$  と  $K$  上の確率測度  $\mu$  に対し、 $H^0(L)$  の元  $s$  の 2 種類のノルムを

$$\|s\|_{L^2(\mu, \phi)}^2 = \int_X |s|_\phi^2 d\mu$$

$$\|s\|_{L^\infty(K, \phi)} = \sup_K |s|_\phi$$

とおく。明らかに  $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{L^\infty}$  である。

$$\rho(\mu, \phi)(x) = \sup_{\substack{s \neq 0 \\ s \in H^0(L)}} \frac{|s(x)|_\phi^2}{\|s\|_{L^2(\mu, \phi)}^2}$$

とおく ((1.3) の拡張)。Bergman 核の性質より

$$\dim H^0(L) = \int \rho(\mu, \phi) d\mu$$

であるから、左辺を  $N$  とおき、確率測度  $\beta$  を

$$\beta(\mu, \phi) = \frac{1}{N} \rho(\mu, \phi) \mu$$

において定義する。  $\beta$  を  $(K, \phi)$  に関する Bergman 測度という。

次の定理は今や非常に有名である。

定理 5.2. (Bouche-Catlin-Tian-Zelditch)  
 $\mu$  と  $\phi$  は  $X$  上  $C^\infty$  級で、 $\mu > 0$  かつ  $\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi > 0$  とする。このとき  $C^\infty$  級の測度としての漸近展開

$$\beta(\mu, k\phi) = \frac{1}{V} MA(\phi) + \frac{\mu_1}{k} + \frac{\mu_2}{k^2} + \dots + O(k^{-\infty})$$

が存在する。ただし  $MA(\phi) := (\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi)^n$ ,  $V := \int_X (\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi)^n$ .  
 $n = \dim X$ .

2007年、Berman は次を得た。

定理 5.3. (cf. [Be])  $\mu$  と  $\phi$  は  $X$  上  $C^\infty$  級であり、 $\mu > 0$  とする。このとき  $L$  のファイバー計量  $e^{-\phi_X}$  を

$$\phi_X = \sup \{ \psi \mid \psi \leq \phi \text{ かつ } \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \psi \geq 0 \}$$

により定めると、

$$\beta(\mu, k\phi) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} V^{-1} MA(\phi_X) \text{ (弱収束)}$$

となる。

$$\phi_K = \sup \{ \psi \mid \psi|_K \leq \phi|_K \text{ かつ } \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \psi \geq 0 \}$$

$$\mu_{\text{eg}}(K, \phi) = V^{-1} MA(\phi_K^*)$$

とおく。ただし  $\phi_K^*$  は  $\phi_K$  の上半連続化 (upper envelope) とする。

$\mu_{\text{eq}}(K, \phi)$  を  $(K, \phi)$  に関する平衡測度 (equilibrium measure) という。このとき次が成り立つ。

定理 5.4. (cf. [B-B-1])  $\mu$  を  $(K, \phi)$  に関する Bergman 測度とすると、

$$\beta(\mu, k\phi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu_{\text{eq}}(K, \phi) \quad (\text{弱})$$

「平衡収束」に関しては、2008年9月現在、これが注目すべき最新の結果であろうと思われる。

ちなみに、Dirac 測度の平均による  $\mu_{\text{eq}}(K, \phi)$  の近似列は、 $K$  が  $\mathbb{C}$  のコンパクト集合の場合に M. Fekete が始めて与えた ( $\mu_{\text{eq}}(K, \phi)$  の元来の定義)。定理 5.4 はその直接の一般化ではないが、[B-B-2] では Fekete の近似列の一般化についても論じられている。

## References

- [B-L] Bell, S. and Ligočka, E., *Invent. Math.* 57 (1980), 283–289.
- [Be] Berman, R., *arXiv:0704.1640*
- [B-B-1] Berman, R. and Boucksom, S., *arXiv:0803.1950*
- [B-B-2] ———, *arXiv:0807.0035*
- [B] Berndtsson, B., *Ann. Fourier* 56 (2006), 1633–1662.
- [B-P] Berndtsson, B. and Păun, M., *arXiv:0804.3884 v2 [math.AG]*
- [Bo] Bouche, T., (Trento, 1994), 67–81, de Gruyter, Berlin, 1996.
- [C] Catlin, D., (Katata, 1997), *Trends Math.* 1999, pp. 1–23.
- [Ch] Chen, B.-Y., *Nagoya Math. J.* 175 (2004), 165–170.
- [Dm] Demailly, J.-P., *J. Alg. Geom.* 1 (1992), 361–409.
- [D] Donnelly, H., *Math. Z.* 223 (1996), 303–308.
- [D-W] DeGeorge, D and Wallach, N., *Ann. of Math.* 107 (1978), 133–150.
- [F-1] Fefferman, C., *Invent. Math.* 26 (1974), 1–65
- [F-2] ———, *Adv. Math.* 31 (1979), 131–262.
- [G-K] Greene, R.E. and Krantz, S., *Adv. in Math.* 43 (1982), 1–86.
- [Hi] Hirachi, K., *Ann. of Math.* 151 (2000), 151–191.
- [Hö] Hörmander, L., *Acta Math.* 113 (1965), 89–152.
- [Kd] Kazhdan, D., *Actes du Congrès Intern. des Math.* Tome 2, pp 321–325, 1971.
- [K] Kobayashi, S., *Trans. AMS* 92 (1959), 267–289.
- [L-R-S] Luo, W., Rudnick, Z. and Sarnak, P., *Geom. Func. Anal.* 5 (1995), 387–401.
- [M] Margulis, A., *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Springer 1991.
- [M-Y] Maitani, F. and Yamaguchi, H., *Math. Ann.* 303 (2004), 477–489.
- [N] Nakamura, I., *Proc. Japan Acad.* 48 (1972), 447–449.
- [O-1] Ohsawa, T., *Publ. RIMS*, 24 (1988), 265–275.
- [O-2] ———, unpublished note.

- [O-3] 多変数複素解析 岩波書店 1997, 2006.
- [O-4] to appear.
- [O-T] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., Math.Z. 195 (1987), 197-204.
- [R] Rhodes, A., Duke Math. J. 72 (1993), 725-738.
- [Ti] Tian, G., J. Diff. Geom. 32 (1990), 99-130.
- [T] Tsuji, H., math.AG/0703729.
- [Y-1] Yau, S.T., Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339-411.
- [Y-2] ———, Monograph de l'enseignement math. 33, 1986.
- [Yn] Yeung, S.K., Duke Math. J. 73 (1994), 201-226.
- [Z] Zelditch, S., Intern. Math. Res Notices (1998), 317-331.